

① a) Piani per π : $\lambda x + \lambda y + (\mu - \lambda)z - (\lambda + \mu) = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$1 = d(\pi, 0) = \frac{|-(\lambda + \mu)|}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 + (\mu - \lambda)^2}} \Leftrightarrow \cancel{\lambda^2} + \cancel{\mu^2} + 2\lambda\mu = 2\lambda^2 + \cancel{\mu^2} + \cancel{\lambda^2} - 2\lambda\mu$$

2 soluzioni: $\begin{cases} \lambda = 0: \boxed{z - 1 = 0} \\ \lambda = 2\mu: \boxed{2x + 2y - z - 3 = 0} \end{cases} \Leftrightarrow 4\lambda\mu - 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda(2\mu - \lambda) = 0$

b) Equazioni parametriche per π : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$; $\vec{v}_\pi = (-1, 1, 0)$

Il piano coordinato yz ha vettore giacitura $\vec{u} = (1, 0, 0)$.

Ora $\frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{u}}{\|\vec{v}_\pi\| \|\vec{u}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, quindi $\widehat{\vec{v}_\pi, \vec{u}} = \arccos(-1/\sqrt{2}) = 3\pi/2$.

Dunque l'angolo tra π ed il piano coordinato yz è pari a $\pi/2$.

c) Calcoliamo $R = \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z + 1 = 2 \\ z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, $\boxed{R = (0, 2, 1)}$

Per determinare Q , scriviamo equazioni parametriche per la retta s di punto origine P e direzione perpendicolare a π (vett. parallelo a $\vec{v}_\pi = (-1, 1, 0)$):

$s: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$; il punto $s \cap \pi$ ha ascisse $t \in \mathbb{R}$ tale che $t + t - 2 = 0$ dunque $t = 1$.

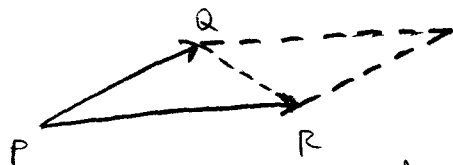
Il punto Q si ottiene dunque sulla retta s con ascisse $t = 2$,
dunque $\boxed{Q = (2, 2, 1)}$

Ottieniamo

$$\vec{PQ} = (2, 2, 0)$$

$$\vec{PR} = (0, 2, 0)$$

ed allora



Area di $\triangle PQR$ $= \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right|$

$$= \frac{1}{2} |(0, 0, 4)| = \frac{1}{2} \cdot 4 = \underline{\underline{2}}.$$

②

$$z = f(x, y) = (x^2 - y) e^{y-x}$$

$$a) \frac{\partial f}{\partial x} = e^{y-x} (2x - (x^2 - y)) = e^{y-x} (-x^2 + 2x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y-x} (-1 + (x^2 - y)) = e^{y-x} (x^2 - y - 1)$$

Il piano tangente $\bar{e}$ // al piano coordinato xy se e solo se

$\nabla f = 0$, cioè se e solo se

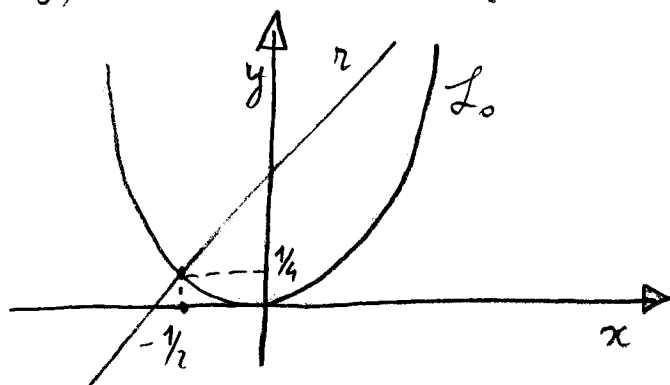
$$\begin{cases} -x^2 + 2x + y = 0 \\ x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + y + x^2 - y - 1 = 0 \\ x^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/4 - 1 = -3/4 \end{cases} \quad \text{Pertanto } \nabla f(P) = 0 \Leftrightarrow P = (1/2, -3/4).$$

Perciò $f(1/2, -3/4) = e^{-5/4}$, otteniamo un unico punto nel $G(f)$:

$$G = (1/2, -3/4, e^{-5/4})$$

$$b) \underline{L_0}: (x^2 - y) e^{y-x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = x^2}$$



$\bar{e}$ la parabola in figura

Il gradiente di f nei punti di L_0 è dato da $\nabla f|_{L_0} = e^{x^2-x} (2x, -1)$

$$\text{Però } \nabla f|_{L_0} \perp (-1, 1) \Leftrightarrow 0 = e^{x^2-x} (2x-1) \cdot (-1, 1) = -e^{x^2-x} (2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x = -1/2.$$

Si ottiene quindi in L_0 l'unico punto $\boxed{P_0 = (-1/2, 1/4)}$.

c) Poiché la retta tangente ad L_0 in P_0 ha coeff. angolare pari a $2x|_{x=-1/2} = -1$, la retta r normale ha coeff. angolare pari a 1. Dunque

r ha equazione $y - 1/4 = x + 1/2$ cioè $y = x + 3/4$.

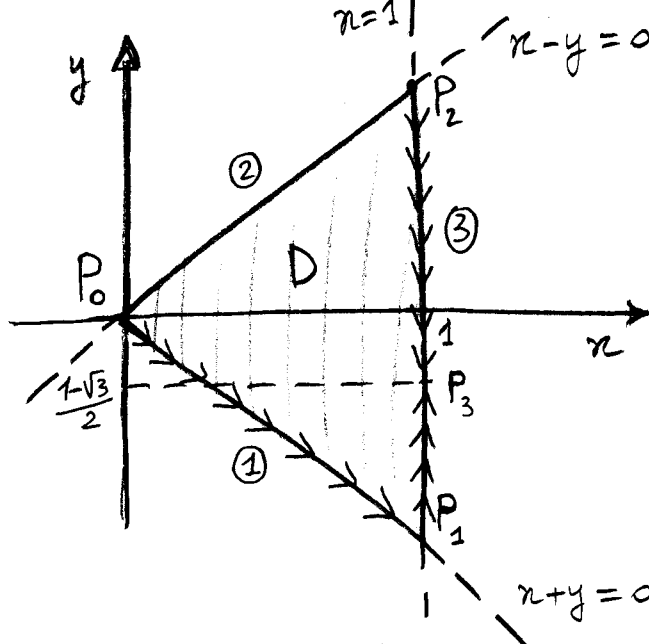
Però $\nabla f|_r = e^{3/4} (-x^2 + 3x + 3/4, x^2 - x - 7/4)$, ed allora deve essere

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot (1, 1) / \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x^2 + 3x + 3/4 + x^2 - x - 7/4) \text{ cioè } 2x = 1.$$

$$\text{Allora } \boxed{P_2 = (1/2, 5/4)}$$

③ $z = f(x, y) = (x-y) e^{x^2-y^2}$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 1, x-y \geq 0, x+y \geq 0\}$



$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2-y^2} (1+2x(x-y)) = e^{x^2-y^2} (2x^2-2xy+1)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2-y^2} (-1-2y(x-y)) = e^{x^2-y^2} (2y^2-2xy-1)$

la funzione $\bar{e} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2xy+1=0 \\ 2y^2-2xy-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+2y^2-4xy=0 \\ 2y^2-2xy-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2xy=0 \\ 2x^2-2xy-1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0 \\ 2x^2-2xy-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^2-2x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ -1=0 \end{cases}$

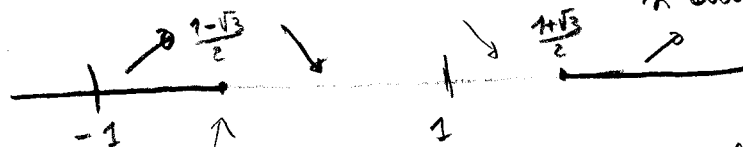
NESSUNA SOLUZIONE, dunque nessun punto critico interno a D.

Ora $\partial D = ① \cup ② \cup ③$.

• $f|_{①} = 2x, x \in [0, 1]$; $P_0 = (0, 0) \rightarrow f(P_0) = 0$
 $P_1 = (1, 2) \rightarrow f(P_1) = 2$

• $f|_{②} = 0, x \in [0, 1]$; dunque $f(P_0) \div f(P_2) = 0$ con $P_2 = (1, 1)$

• $f|_{③} = (1-y) e^{1-y^2}, y \in [-1, 1]$; $f|_{③}' = e^{1-y^2} (-1-2y(1-y)) = e^{1-y^2} (2y^2-2y-1)$
 si annulla in $y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$



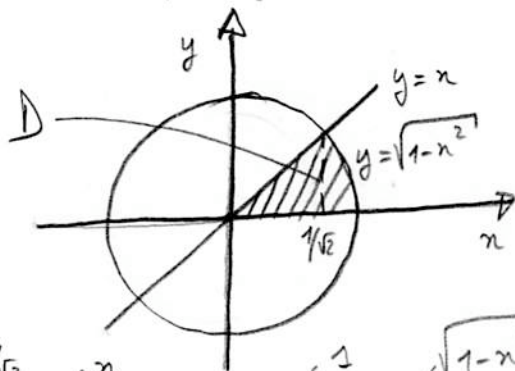
$P_3 = (1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}) \rightarrow f(P_3) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{1-\frac{1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

L'andamento di f su ∂D è riassunto nel disegno a "spina di pesce".

In definitiva ② è costituita da punti di minimo, con $\min = 0$
 $P_3 = (1, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$ è punto di Massimo, con $\text{Max} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

④

Il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$ è come in figura:



$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_0^x xy \, dy + \int_{1/\sqrt{2}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

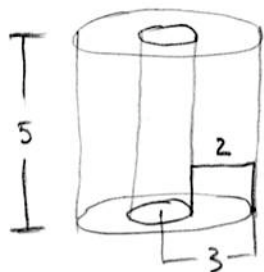
$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^3}{2} dx + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{x(1-x^2)}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} [x^4]_0^{1/\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{1/\sqrt{2}}^1 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) = \frac{1}{16}$$

⑤

V:



$$\text{Vol} = \iiint_V \frac{x^2 z}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_0^5 dz \int_1^3 \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \cos^2 \theta \cdot z}{\rho^4} \rho d\theta =$$

$$= \int_0^5 z \, dz \int_1^3 \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^5 [\ln \rho]_1^3 \left[\sin \theta \cos \theta + \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{25}{2} \pi \ln 3$$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \theta \, d\theta &\stackrel{\text{P.P.}}{=} \sin \theta \cos \theta + \int \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= \sin \theta \cos \theta + \int (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta = \\ &= \sin \theta \cos \theta + \theta - \int \cos^2 \theta \, d\theta \\ \text{da cui} \\ \int \cos^2 \theta \, d\theta &= \frac{1}{2} (\sin \theta \cos \theta + \theta) \end{aligned}$$

⑥

la serie è a termini positivi.

Studiamo l'ordine di infinitesimo del termine n -esimo.

• $\sqrt[n]{e} - 1 = e^{1/n} - 1$ è infinitesimo di ordine 1

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n - 1}{n} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{e^n}{1} = 1 \right)$$

• $1/\sqrt{n}$ è infinitesimo di ordine $1/2$

• $\sin(1/n)$ è infinitesimo di ordine 1

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{n} \stackrel{(H)}{=} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\cos n}{1} = 1 \right)$$

Quindi il termine n -esimo è infinitesimo di ordine

$$\alpha = \lambda + \frac{1}{2} - 1 = \lambda - \frac{1}{2}.$$

La serie perciò converge se e solo se $\alpha > 1$ cioè se e solo se

$\lambda - \frac{1}{2} > 1$, quindi se e solo se $\boxed{\lambda > \frac{3}{2}}$.